Demostración de la conjetura de Goldbach

Autor: Revista Vinculando - 04-05-2011
https://vinculando.org/educacion/demostracion_de_la_conjetura_de_goldbach.html

El 7 de junio de 1742 en una carta dirigida a Leonard Euler, Goldbach redactó:

“Todo número par mayor que dos puede ser expresado como la suma de dos números primos”

Ej.:

4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 3 + 7 = 5 + 5; 12 = 5 + 7.

De forma algebraica la conjetura de Goldbach se puede expresar como:

$P + P' = 2m$ /$m > 1$

Para recordar:

Un número primo es aquel cuyos divisores propios son el mismo número y el uno.

El 2 el único número primo par.

Por definición el 1no es un número primo.

Poderosos ordenadores han confirmado la conjetura para valores muy grandes, pero eso no es una prueba fehaciente como para considerarla una demostración. Para que la conjetura pueda considerarse un teorema se debe encontrar una forma genérica que englobe todos los números pares mayores que dos, tarea nada sencilla pues debemos recordar que los números pares son infinitos.

Gran parte de la comunidad matemática cree que la conjetura es verdadera, pero en matemáticas ‘creer’ es una palabra prohibida, hay que demostrarlo.

Pero, ¿Qué importancia tiene demostrar esto, de que sirve?

La verdad es que en la práctica esta conjetura no tiene ninguna utilidad, no por el momento, más si es importante desde el punto de vista matemático, recordemos que las matemáticas son abstractas, sus postulados, axiomas, métodos, algoritmos y demás pertenecen sólo a ella, la utilidad que se le dé a los mismos es tarea de los mortales.

Eso significa ¿Qué no vale la pena demostrar la conjetura de Goldbach?

De ninguna manera, pensar eso es como decir que no valió la pena que Beethoven compusiera sus hermosas obras musicales, pues al final no tienen ninguna utilidad práctica mas que deleitar a quienes las escuchan; así como estas, toda obra matemáticas aplicada o no, ha sido concebida para deleitar el espíritu de aquellos que aprecian la mas sublime de las ciencias.

Dado que la conjetura de Goldbach está estrechamente relacionada con las siguientes sucesiones, las consideraremos tema de estudio.

2 **3** 4

2 3 **4** 5 6

2 3 4 **5** 6 7 8

2 3 4 5 **6** 7 8 9 10

2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12

2 3 4 5 6 7 **8** 9 10 11 12 13 14

2 3 4 5 6 7 8...**m**...m+1...m+2...2m-2

Como se puede ver en las series, si la conjetura de Goldbach es cierta, entonces deben existir dos primos tales que: 2 < p1 < m < p2 < 2m-2.

Sabemos que existe por lo menos un primo entre m y 2m-2 (postulado de Bertrand), entre 2 y m también existe por lo menos un primo, para valores de m>3.

Ahora que sabemos que existen por lo menos un par de primos entre 2 y 2m-2, ¿podemos afirmar que la conjetura de Goldbach es verdadera? la respuesta es que aun no, para que la conjetura sea verdadera, nuestros primos (p1, p2) deben ser de la forma:

p2 = m + (p2 - p1)/2

p1 = m - (p2 - p1)/2

El problema con estas igualdades es que todos los números entre 2 y 2m -2 se pueden expresar de esta forma, por lo que no nos resulta muy útil para demostrar la conjetura.

Si seguimos observando, notaremos que todo par mayor que dos se puede escribir como la suma de un número primo (px) y otro número impar (primo o compuesto).

En realidad lo expresado anteriormente es un teorema que podemos expresar de la siguiente manera:

T1) Px + C = A, tal que A > 2

Donde:

Px = número primo.

C = número impar (primo o compuesto).

A = número par.

Suma de términos de sucesiones aritméticas.

Sean S_u y S_t sucesiones tales que la diferencia entre los términos posteriores y anteriores de S_u sea una constante (d) igual a la diferencia entre los términos posteriores y anteriores de S_t. Esto es:

$S_u = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ... a_{n-1}, a_n$

$S_t = b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 ... b_{n-1}, b_n$

$a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} = d$

Como la diferencia entre los términos a_n, a_{n-1} y b_n, b_{n-1} son iguales a la misma constante, podemos decir que:

1) Los términos de S_u son iguales a los términos de S_t, si $a_1 = b_1$.

2) Los términos de S_u son un subconjunto de S_t, si $b_1 < a_1$.

3) Los términos de S_t son un subconjunto de S_u, si $a_1 < b_1$.

4) La diferencia entre los términos n-ésimos de S_u y S_t son también constantes, esto es:

$a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} = k$

Visto este punto, podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los términos de S_u y S_t.

A cada término de S_u le corresponde otro perteneciente a S_t, tal como se muestra en la figura 1.

fig. 1.

Si tomamos un término cualquiera de S_t y lo sumamos a cada uno de los términos pertenecientes a S_u a partir del término que forma su relación biunívoca, tendremos una nueva sucesión aritmética.

Como podemos ver en la figura 2, la suma de b_1 con cada uno de los términos de S_u a partir del término con el que guarda una relación biunívoca, nos genera una nueva sucesión aritmética que llamaremos S_w. Dado que el primer término de S_w es la suma de a_1 y b_1, esta se convierte el la sucesión principal, las demás como la que se muestra en la fig. 3. están contenidas en S_w, a su vez $S_{w''}$ (mostrada en la fig. 4) esta contenida en $S_{w'}$, de manera general, cada nueva sucesión aritmética que se forme siguiendo la secuencia mostrada estará contenida en la sucesión anterior a ella.

fig. 2.

fig. 3.

fig. 4.

Las diferentes sucesiones aritméticas que se pueden formar están representadas en la siguiente gráfica:

Si en vez de efectuar la operación suma, efectuásemos la operación resta (usando el mismo procedimiento que se ha mostrado) como resultado tendremos una sucesión única, es decir que es la misma para las diferentes combinaciones ordenadas que se puedan obtener a partir del termino que forma la relación biunívoca y los demás términos que le siguen. Esto es:

$S_z = (a_1 - b_1), (a_2 – b_1), (a_3 – b_1), (a_4 – b_1), (a_5 – b_1), (a_6 – b_1), ...(a_{n-1} – b_1), (a_n - b_1)$

$S_{z'} = (a_2 - b_2), (a_3 - b_2), (a_4 - b_2), (a_5 - b_2), (a_6 - b_2), ...(a_{n-1} - b_2), (a_n - b_2)$

$S_{z''} = (a_3 - b_3), (a_4 - b_3), (a_5 - b_3), (a_6 - b_3),...(a_{n-1} - b_3), (a_n - b_3)$

$S_z = S_{z'} = S_{z''}…$

Aplicando estos conceptos, podemos proceder a demostrar la conjetura de Goldbach de la siguiente manera:

Nota:

Como el cuatro es el único número par que sólo puede ser expresado como la suma de dos números primos pares (la conjetura permite repetir el mismo número) lo consideraremos un caso especial y no será incluido. Esto no afecta en nada nuestros resultados puesto que sabemos que la conjetura de Goldbach se cumple para dicho número. De esta forma podemos alterar la versión original y definir la conjetura como:

P + P’ = 2m /m > 2

Sean: A, B, C, Px, Py, D, sucesiones infinitas de números enteros, tales que:

A = 6, 8, 10, 12, 14... (todos los pares mayores que 4).

B = 8, 10, 12, 14, 16...(todos los pares mayores que 6).

Px = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...(todos los primos impares).

Py = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...(todos los primos impares).

C = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15... (todos los impares mayores que 1).

D = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17... (todos los impares mayores que 3).

Por Teorema tenemos que:

Ec1) Px + C = A

Como los elementos de B y D no son más que subconjuntos de A y C respectivamente, podemos decir que:

Ec2) Py + D = B

Sumando ec1 y ec2 nos da:

Px + C + Py + D = A + B

Despejando nos queda:

Px + Py = (A + B) - (C + D)

La operación binaria A + B nos da la siguiente sucesión aritmética de números:

S1 = 14, 16, 18, 20, 22...(todos los pares mayores que 12)

La operación binaria C + D nos da la siguiente sucesión aritmética de números:

S2 = 8, 10, 12, 14, 16...(todos los pares mayores que 6)

Aplicando el principio de adición de te términos de sucesiones aritméticas a S1 - S2, tendremos:

Efectuando la operación resta:

14 - 8 = 6

16 - 8 = 8

18 - 8 = 10

20 - 8 = 12

22 - 8 = 14

...

...

...

2k - 8 = 2w

16 - 10 = 6

18 - 10 = 8

20 - 10 = 10

22 - 10 = 12

...

...

...

2k - 10 = 2w

22 - 16 = 6

...

...

...

2k - 12 = 2w

20 - 14 = 6

22 - 14 = 8

...

...

...

2k - 14 = 2w

18 - 12 = 6

20 - 12 = 8

22 - 12 = 10

...

...

...

2k - 10 = 2w

Como podemos notar, el resultado nos da una sucesión aritmética que contiene a todos los números pares mayores que 4, de lo que concluimos que la conjetura fuerte de Goldbach es verdadera.